Polynômes

Recherche de polynômes

Exercice 1. *Équation à inconnue polynôme*

Dans chacun des cas suivants, déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

1. $P(X)P(X) = P(X)$
2. $P \circ P = P$
3. $P(X) = XP(X)$
4. $P(X) = XP'(X)$
5. $P(2X) = P'(X)P''(X)$
6. $P(2X+3) = P(3X+2)$

Exercice 2.
Déterminer les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P'|P$.

Relations coefficients-racines

Exercice 3. *Discriminant en degré 3.*
Soient p et q deux complexes et $P(X) = X^3 + pX + q$.
On notera a, b et c les racines complexes de P (éventuellement confondues).

1. Exprimer $P'(a)P'(b)P'(c)$ en fonction de p et q.
2. En déduire que P a une racine multiple si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Exercice 4. *Systèmes symétriques.*

1. En exploitant les relations coefficients-racines sur $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}$, retrouver les expressions de $\displaystyle\sum_{\omega \in U_n} \omega$ et de $\displaystyle\prod_{\omega \in U_n} \omega$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ 1/x + 1/y + 1/z = 1 \\ x^2+y^2+z^2 = 21 \end{cases}$
3. Resoudre $\begin{cases} x+y+z = 2 \\ x^2+y^2+z^2 = 14 \\ x^3+y^3+z^3 = 20 \end{cases}$

Exercice 5. *Calcul de* $\zeta(2)$ (rappel !)

Dans cet exercice, on note $P(X) = (X+\mathrm{i})^{2n+1} - (X-\mathrm{i})^{2n+1}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que les racines de $P(X)$ sont les cotan $\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$, $k \in \{1, \ldots, 2n\}$.
2. Montrer qu'on peut écrire $P(X) = Q(X^2)$ pour une polynôme $Q(X)$ dont on déterminera le degré.
   Donner l'expression des coefficients de $Q(X)$ à l'aide des coefficients binomiaux.
3. En déduire qu'on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{2n(2n-1)}{6}$.
4. Montrer : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{cotan}^2(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1 + \mathrm{cotan}^2(x)$.
5. Déduire de ce qui précède un encadrement de S_n. Retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Utilisation des racines

Exercice 6. *Fonctions polynomiales*

Soit $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ une fonction polynomiale de degré n.

1. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   a. Montrer que, si $n \geqslant 1$, alors f est surjective.
   b. Montrer que, si $n \geqslant 2$, alors f n'est pas injective.
2. Ces résultats sont-ils vrais si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Exercice 7. *Équation à inconnue polynôme (2)*

1. On cherche tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $XP(X) = (X-3)P(X+1)$.
   a. Montrer qu'alors 1, 2 et 3 sont racines de P.
   b. Déterminer tous les polynômes R tels que $R(X) = R(X+1)$.
   c. Conclure.
2. On cherche tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.
   a. Montrer que si P est solution et non nul alors ses racines sont parmi $0, 1, -j, -j^2$.
   b. Conclure.

Racines, divisibilité, factorisation

Exercice 8. *Multiplicité.*

1. Quel est la multiplicité m de la racine 1 du polynôme $nX^{n+2} - (n+3)X^n + nX - n + 3$ $(n \geqslant 1)$?
2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_n(X) = 1 + \dfrac{X}{1!} + \dfrac{X^2}{2!} + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$ n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

   On s'intéresse maintenant aux racines réelles de P_n.

   Montrer que, pour n pair, P_n n'a aucune racine réelle, et, pour n impair, P_n a une unique racine réelle.

Exercice 9. *Divisibilité*

Montrer que :

1. $(X+1)^{2n+1} + X^{n+2}$ est divisible par $X^2 + X + 1$ $(n \in \mathbb{N})$.
2. $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k\right)^2 - n^2 X^{n-1}$ est divisible par $(X-1)^2$ $(n \geqslant 2)$. Est-il divisible par $(X-1)^3$?

Arithmétique

Exercice 10. *Sommes de carrés*

Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. Montrer que P est la somme de deux carrés, *i. e.* $\exists (Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = Q^2 + R^2$. *Indication : utiliser la décomposition en irréductibles d'un polynôme de* $\mathbb{R}[X]$. *On pourra aussi se rappeler d'un exercice déjà vu sur les sommes de carrés d'entiers...*

Exercice 11. *Bezout et Gauss.*

Montrer que $(X-1)^2$ et $(X+1)^2$ sont premiers entre eux et donner une relation de Bezout.

En déduire tous les polynômes $P(X)$ de $\mathbb{R}_4[X]$ tels que $(X-1)^2$ divise $P(X)+1$ et $(X+1)^2$ divise $P(X)-1$.